



## XXI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA - ACEROS AREQUIPA

ONEM-AA 2025

### **Etapla UGEL - Nivel 1**

21 de agosto de 2025

### **Problema 1**

En una fiesta asistieron 60 personas, entre varones y mujeres. Cada varón bailó exactamente con 3 mujeres, y cada mujer bailó exactamente con 2 varones. ¿Cuántas mujeres asistieron a la fiesta?

#### **Solución**

Inicialmente, sea  $a$  en número de hombres y  $b$  el número de mujeres. Al considerar todas las parejas de hombres y mujeres que bailaron entre sí, entonces tenemos:

$$\# \text{ de parejas} = 3a = 2b.$$

Como  $a + b = 60$ , entonces  $a = 24$  y  $b = 36$ . Por lo tanto asistieron 36 mujeres

**Respuesta: 36**

### **Problema 2**

En el país donde vive David, cada año en el que su ingreso anual supera los 28 000 euros, él debe pagar un impuesto igual al 9 % del excedente. Por ejemplo, si su ingreso anual fuese 30 000 euros, tendría que pagar un impuesto igual al 9 % de 2 000 euros. El año pasado, el impuesto que pagó David resultó ser igual al 2 % de su ingreso anual. ¿Cuál fue el ingreso anual de David en ese año?

### Solución

Sea  $E$  el excedente, entonces tenemos la ecuación:

$$9\%E = 2\%(28000 + E) \rightarrow E = 8000.$$

Por lo tanto, el ingreso anual ese año fue  $28000 + 8000 = 36000$ .

**Respuesta:** 36 000

### Problema 3

En una clase con 5 estudiantes de un instituto de inglés, la profesora tomó un examen de 100 puntos. Al día siguiente, entregó los exámenes corregidos uno por uno, siguiendo el orden alfabético de los apellidos.

Después de cada entrega, calculó el promedio de las calificaciones entregadas hasta ese momento, y en todos los casos dicho promedio resultó ser un número entero.

Se sabe que las calificaciones, en orden creciente, fueron 71, 76, 80, 82 y 91. ¿Cuál fue la calificación del último examen que entregó la profesora?

### Solución

Sean  $a, b, c$  y  $d$  los primeros cuatro números. Entonces,  $a + b + c + d$  es múltiplo de 4. Estudiando los restos al dividir por 4, tenemos:

- 71 tiene resto 3,
- 76 tiene resto 0,
- 80 tiene resto 0,
- 82 tiene resto 2,
- 91 tiene resto 3.

Para que la suma sea múltiplo de 4, los números que pueden faltar es 76 u 80.

Supongamos que el número que falta es 76, entonces al estudiar los restos de los demás números al dividir por 3, nos queda:

- 71 tiene resto 2,
- 80 tiene resto 2,
- 82 tiene resto 1,
- 91 tiene resto 1.

y observamos que no hay 3 cuyo suma sea múltiplo de 3. El único caso posible es que último número sea 80, y un ejemplo es el siguiente:

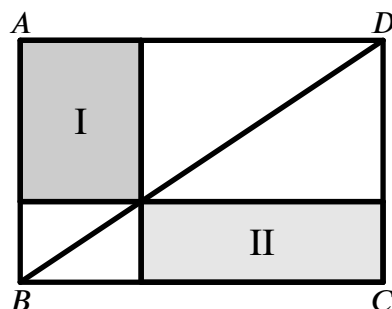
76 82 91 71 80

Por lo tanto, el último debe ser 80.

**Respuesta: 80**

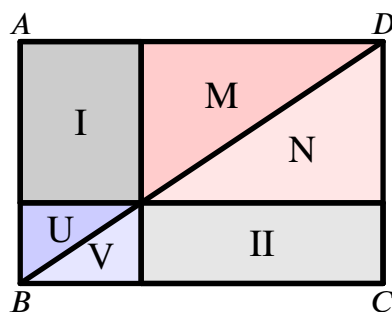
## Problema 4

En la siguiente figura,  $ABCD$  es un rectángulo y la región I es un rectángulo cuya área es  $9 \text{ m}^2$ . Determine, en metros, el menor valor posible del perímetro de la región II.



## Solución

En la siguiente figura mostrada, las regiones U y V tienen la misma área, así como las regiones M y N tienen la misma área:



Dado que también:  $U+I+M=V+II+N$ , entonces el área de II es  $9 \text{ m}^2$ . Si los lados de II miden  $a$  y  $b$  metros, entonces  $ab = 9$ . Finalmente, tenemos:

$$(a - 3)^2 \geq 0 \rightarrow a^2 + 9 \geq 6a \rightarrow a^2 + ab \geq 6a$$

como  $a$  es un número positivo, entonces  $a + b \geq 6$ . Finalmente, el menor perímetro posible es 12 metros.

El valor mínimo es alcanzado cuando la región II es un cuadrado de lado de longitud 3 metros.

**Respuesta: 12**

## Problema 5

El papá de Pedro le envía dinero a través de una cuenta de banco que comparten. El banco les permite realizar dos tipos de operaciones en esa cuenta:

- Abonar 30 soles.
- Retirar 20 soles.

Por cada día, la cuenta tiene un límite de 3 operaciones. ¿Cuál es la cantidad máxima de dinero que puede retirar Pedro en 31 días?

### Solución

Primero veamos un ejemplo donde es posible realizar 55 retiros del banco. Seguiremos la rutina:

- Los primeros dos días abonaremos 3 veces 30 soles. Así hemos abonado 180 soles.
- Cada uno de los siguientes tres días, retiraremos 3 veces 20 soles. Así, hemos realizado 9 retiros.

Repetiendo ésa rutina 6 veces, en un plazo de 30 días se han realizado 54 retiros. Finalmente, en el día 31 abonamos 2 veces 30 soles y realizado el retiro número 55.

Para demostrar que es imposible realizar 56 retiros, supongamos que sea posible. Sea  $a$  el número de retiros y  $b$  el número de veces que se ingresa dinero. Por lo supuesto,  $a \geq 56$ . Como se han realizado  $a$  retiros, entonces el dinero en la cuenta es:

$$30 \times b \geq 20 \times a \geq 20 \times 56 \rightarrow b \geq 38.$$

Como  $a \geq 56$  y  $b \geq 38$ , entonces  $a + b \geq 94$ . Pero en 31 días se realizan a lo más 93 operaciones.

Por lo tanto, es imposible realizar más de 55 retiros. Finalmente, la mayor cantidad de dinero que puede retirar Pedro es 1100 soles.

**Respuesta: 1 100**

## Problema 6

Carmen dibuja en una pizarra cuatro figuras geométricas: un triángulo, un cuadrado, un hexágono y un octágono. Luego, le pide a su hermano Ramón que escriba, en cualquier orden, los números del 1 al 4, colocando uno dentro de cada figura (sin repetir). Si Ramón elige el orden al azar, la probabilidad de que, en cada figura, el número escrito sea un divisor del número de lados de esa figura, es  $P\%$ . Determine el valor de  $P$ .

### Solución

Para lograr el objetivo, dentro del triángulo debemos colocar los números 1 o 3, mientras que dentro del hexágono debemos colocar los números 1, 2 o 3. Así tenemos los casos:

| $\triangle$ | $\square$ |   |   |
|-------------|-----------|---|---|
| 1           | 2         | 3 | 4 |
| 1           | 4         | 3 | 2 |
| 3           | 2         | 1 | 4 |
| 3           | 4         | 1 | 2 |
| 3           | 1         | 2 | 4 |
| 3           | 4         | 2 | 1 |

Dado que hay  $4! = 24$  casos en total, entonces la probabilidad es  $\frac{6}{24} = 25\%$ . Por lo tanto  $P = 25$ .

**Respuesta: 25**

### Problema 7

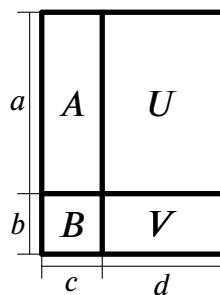
En la siguiente figura se muestra un terreno rectangular que ha sido dividido en 7 sectores, también rectangulares. Dentro de cada sector, se ha escrito el número que representa el área del sector en metros cuadrados.

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $X$ | 168 | 192 |
|     | 140 | $Y$ |
| 96  | 112 |     |

Determine el valor de  $X + Y$ .

### Solución

Observemos que en un diseño de la siguiente forma, las áreas de las regiones vienen dadas por:



$$A = ac,$$

$$B = bc,$$

$$U = ad,$$

$$V = bd,$$

$$\text{Por lo tanto: } \frac{A}{B} = \frac{U}{V}.$$

## Etapa UGEL - Nivel 1

Del diseño del problema, tenemos las relaciones:

$$\frac{X}{96} = \frac{168 + 140}{112} \rightarrow X = 264,$$

$$\frac{Y}{192} = \frac{140 + 112}{168} \rightarrow Y = 288.$$

Finalmente,  $X + Y = 552$ .

**Respuesta: 552**

### Problema 8

Un muro ha sido cuadriculado y en cada cuadradito se ha escrito un número entero positivo, siguiendo el patrón mostrado en la figura.

|  |    |     |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
|--|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|--|
|  |    |     |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
|  | 51 | ... |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
|  | 50 | 41  | 40 | 39 | 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 |  |  |
|  | 49 | 42  | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 32 |  |  |
|  | 48 | 43  | 18 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9  | 26 | 31 |  |  |
|  | 47 | 44  | 17 | 14 | 3  | 4  | 5  | 8  | 27 | 30 |  |  |
|  | 46 | 45  | 16 | 15 | 2  | 1  | 6  | 7  | 28 | 29 |  |  |

← Fila 6

← Fila 5

← Fila 4

← Fila 3

← Fila 2

← Fila 1

¿En cuál fila se encuentra el cuadradito con el número 2000?

### Solución

Calcularemos el término de la figura cada vez que hace un giro, es decir calcularemos los términos en las posiciones sombreadas:

|  |    |     |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
|--|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|--|
|  |    |     |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
|  | 51 | ... |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |
|  | 50 | 41  | 40 | 39 | 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 |  |  |
|  | 49 | 42  | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 32 |  |  |
|  | 48 | 43  | 18 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9  | 26 | 31 |  |  |
|  | 47 | 44  | 17 | 14 | 3  | 4  | 5  | 8  | 27 | 30 |  |  |
|  | 46 | 45  | 16 | 15 | 2  | 1  | 6  | 7  | 28 | 29 |  |  |

← Fila 6

← Fila 5

← Fila 4

← Fila 3

← Fila 2

← Fila 1

Dichos números siguen el patrón:

$$a_1 = 1,$$

$$a_{k+1} = a_k + k + (2k + 1) + k, \text{ para cada entero positivo } k.$$

Tenemos que  $a_k = (2k - 1)k$  y por lo tanto  $a_{32} = 2016$ , es decir tenemos el diseño:

|      |         |
|------|---------|
|      |         |
|      |         |
|      | ⋮       |
| 2000 | Fila 17 |
| ⋮    |         |
| 2016 | Fila 1  |

Por lo tanto, el número 2000 se encuentra en la fila 17.

**Respuesta: 17**

## Problema 9

Dos números enteros positivos son *amigos* cuando al escribirlos uno después del otro se forma un número de seis cifras, y además estas seis cifras se pueden reordenar para formar el número 202 508. Por ejemplo,

- El 2 y el 50 082 son amigos.
- El 522 y el 800 son amigos.
- El 522 y el 8 **no** son amigos.

¿Cuántas parejas de enteros positivos hay que sean amigos?

*Aclaración: Cada pareja de enteros positivos que amigos debe ser contada una sola vez, sin importar el orden.*

## Solución

Para contar el número de parejas, primero notemos que si la pareja **ordenada** es  $(A, B)$ , entonces al concatenar  $A$  y  $B$  obtenemos que  $AB$  es una reordenación de 202508. Alternativamente, podemos considerar de cuántas maneras podemos separar una reordenación de 202508. Así, al considerar la permutación  $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ ,  $a_1 \neq 0$ :

|       |  |       |  |       |  |       |  |       |  |       |
|-------|--|-------|--|-------|--|-------|--|-------|--|-------|
| $a_1$ |  | $a_2$ |  | $a_3$ |  | $a_4$ |  | $a_5$ |  | $a_6$ |
|-------|--|-------|--|-------|--|-------|--|-------|--|-------|

## Etapa UGEL - Nivel 1

Para esta permutación, podemos dividir al número utilizando alguno de los espacios en blanco, menos aquellos espacios que estén delante de un cero; es decir, de los 5 espacios posibles, solamente podemos usar 3.

Para realizar el conteo tenemos:

$$3 \times \left( \frac{6!}{2!2!} - \frac{5!}{2!} \right) = 360,$$

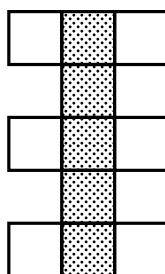
donde  $\frac{6!}{2!2!}$  es el número de maneras de ordenar las cifras de 202508 y  $\frac{5!}{2!}$  es el número de maneras de ordenar las cifras de 202508 que comiencen con 0.

Finalmente, como las parejas  $(A, B)$  y  $(B, A)$  representan a la misma pareja y no hay parejas de la forma  $(A, A)$ , entonces el total es  $\frac{360}{2} = 180$ .

**Respuesta: 180**

### Problema 10

En la siguiente figura, dos casillas se consideran *vecinas* si comparten un lado.



Sofía debe escribir un número entero positivo en cada una de las once casillas, de modo que:

- Todos los números sean distintos entre sí.
- En cada casilla sombreada, el número escrito sea igual al promedio de los números escritos en todas sus casillas vecinas.

Una vez que haya completado esta tarea, Sofía sumará los números escritos en todas las casillas. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar esa suma?

### Solución

Inicialmente mostraremos un ejemplo donde se satisfacen las condiciones del problema:

|   |    |    |
|---|----|----|
| 2 | 6  | 11 |
|   | 5  |    |
| 1 | 4  | 3  |
|   | 7  |    |
| 8 | 10 | 15 |



## Etapa UGEL - Nivel 1

En este caso, el valor que toma la suma es 72. Demostraremos que no toma una suma menor que 72, para ello asumiremos que es posible alcanzar un valor menor o igual que 71.

En el tablero:

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $r$ | $b$ | $s$ |
|     | $y$ |     |
| $p$ | $c$ | $q$ |
|     | $x$ |     |
| $m$ | $a$ | $n$ |

notemos los siguientes hechos:

- La suma total es al menos  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66$ .
- Tenemos las relaciones  $2x = a + c$ ,  $2y = b + c$ ,  $3b = r + s + y$ ,  $3a = m + x + n$  y  $4c = p + q + x + y$ . De estas relaciones, obtenemos que los números 1 y 2 no pueden estar en la columna sombreada y además  $a$ ,  $b$  y  $c$  tienen la misma paridad.
- La suma total de los elementos del tablero es:

$$S = a + \underbrace{m + x + n + c}_{3a} + \underbrace{p + x + q + y + b}_{4c} + \underbrace{r + s + y}_{3b} - \underbrace{(x + y)}_{c + \frac{a+b}{2}} = 4c + 7\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$S = a + m + n + r + b + s + c + \underbrace{p + x + q + y}_{4c} = (a + m + n + r + b + s) + 5c$$

Como todos los números son diferentes, entonces

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 5c \leq (a + m + n + r + b + s) + 5c \leq 71,$$

por lo tanto  $c \leq 10$ . Si  $c = 10$ , Entonces,  $a$  y  $b$  son números pares tales que  $a + b \leq 8$ . Como  $a$  y  $b$  son números diferentes, pares y mayores que 2, entonces  $a + b \geq 4 + 6 = 10$ , lo cual es imposible.

Como  $66 \leq S = 4c + 7\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 71$ , analicemos los casos:

- $S = 71$ : Entonces,  $c = 9$  y  $a + b = 10$ . Como  $a$  y  $b$  son números diferentes, impares y mayores que 2, entonces uno de ellos es 3 y el otro 7. Tenemos el diseño:

|  |   |  |
|--|---|--|
|  | 3 |  |
|  |   |  |
|  | 9 |  |
|  |   |  |
|  | 7 |  |

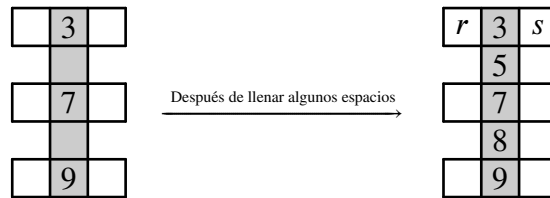
→ Después de llenar algunos espacios →

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 1   | 3 | 2   |
|     | 6 |     |
|     | 9 |     |
|     | 8 |     |
| $m$ | 7 | $n$ |

donde  $m + n = 6$ , lo cual es imposible, pues  $m, n \geq 4$ , ya que son números enteros positivos diferentes de 1, 2 o 3.

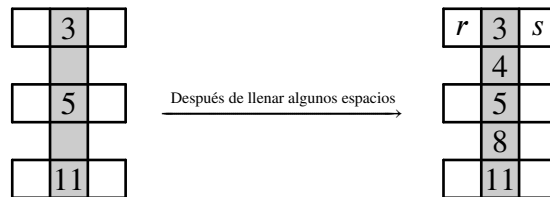
## Etapa UGEL - Nivel 1

- $S = 70$ : Entonces,  $c = 7$  y  $a + b = 12$ . Como  $a$  y  $b$  son números diferentes, impares, mayores que 2 y diferentes de 7, entonces uno de ellos es 3 y el otro 9. Tenemos el diseño:



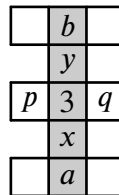
donde  $r + s = 4$ , lo cual es imposible, ya que son números enteros positivos diferentes entre sí y diferentes de 3.

- $S = 69$ : Entonces,  $c = 5$  y  $a + b = 14$ . Como  $a$  y  $b$  son números diferentes, impares, mayores que 2 y diferentes de 5, entonces uno de ellos es 3 y el otro 11. Tenemos el diseño:



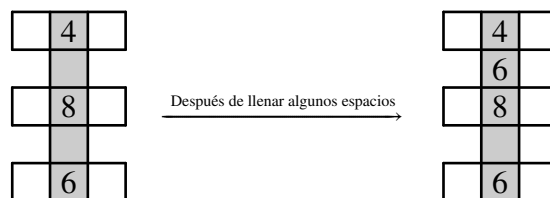
donde  $r + s = 5$ , lo cual es imposible, ya que son números enteros positivos diferentes entre sí y diferentes de 3 y 4.

- $S = 68$ : Entonces,  $c = 3$  y  $a + b = 16$ . Tenemos el diseño:



donde  $x + y = c + \frac{a+b}{2} = 11$ , por lo tanto  $p + q = 1$ , lo cual es imposible pues son enteros positivos.

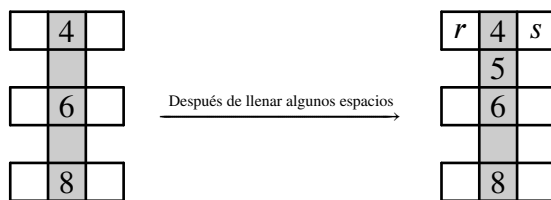
- $S = 67$ : Entonces,  $c = 8$  y  $a + b = 10$ . Como  $a$  y  $b$  son números diferentes, pares, mayores que 2, entonces uno de ellos es 4 y el otro 6. Tenemos el diseño:



lo cual es imposible, pues se repite el 6.

## Etapa UGEL - Nivel 1

- $S = 66$ : Entonces,  $c = 6$  y  $a + b = 12$ . Como  $a$  y  $b$  son números diferentes, pares, mayores que 2, entonces uno de ellos es 4 y el otro 8. Tenemos el diseño:



donde  $r + s = 7$ , lo cual es imposible, ya que son números enteros positivos diferentes de 4, 5 y 6.

**Respuesta: 72**