XXI Olimpiada Nacional Escolar de Matemática - Aceros Arequipa

ONEM-AA 2025

Etapa UGEL - Nivel 2

21 de agosto de 2025

Problema 1

En un colegio, el protocolo establece que los estudiantes deben organizarse en filas con la misma cantidad de estudiantes en cada una. Justo después de organizar a los 756 estudiantes asistentes según lo indicado por el protocolo, aparecieron 4 estudiantes que habían llegado tarde. Entonces, un docente tomó 1 estudiante de cada fila y los reunió junto con los 4 recién llegados para formar dos filas adicionales, logrando así reorganizar a todos los estudiantes cumpliendo nuevamente con el protocolo. ¿Cuántas filas había originalmente, antes de que llegaran los 4 estudiantes rezagados?

Solución

Consideremos que originalmente había n filas de m alumnos cada una. Entonces tenemos que $756 = nm$.
Luego de que lleguen los 4 alumnos rezagados, el docente forma $n+2$ filas con $m-1$ alumnos cada una. Entonces tenemos $760 = (n+2)(m-1) = nm + 2m - n - 2 = 754 + 2m - n$, lo cual nos da que $n = 2m - 6$.
Reemplazando en $756 = nm = (2m-6)m$, obtenemos que $m = 21$ y por ende $n = 36$. Nos pedían la cantidad original de filas, por lo que la respuesta sería 36.

Respuesta: 36

Problema 2

Una mañana, Mercedes preparó café con leche para cada miembro de su familia, incluyéndose a sí misma. Sirvió una taza llena a cada uno, todas con el mismo volumen. Cada taza contenía algo de café y algo de leche, aunque en proporciones distintas según el gusto de cada persona. La taza de Mercedes tenía exactamente la cuarta parte del total de leche y la sexta parte del total de café utilizados en todas las tazas. ¿Cuántos miembros hay en la familia de Mercedes, contándola a ella?

Solución

Consideremos que la cantidad de leche y cafe en la taza de Mercedes es L y C respectivamente, por lo que cada taza tendría un volumen de $L+C$. Por dato, la cantidad total de leche utilizada sería $4L$ y la cantidad total de café sería $6C$. Entonces la cantidad total entre cafe y leche sería $4L+6C$. Si la familia de Mercedes tiene n miembros (incluyendola a ella), entonces el volumen total de las n tazas sería $n(L+C) = 4L+6C$.
Primero, observemos que $n(L+C) = 4L+6C > 4L+4C \to n > 4$. También se tiene que $n(L+C) = 4L+6C < 6L+6C \to n < 6$. Como n es un número entero, tendremos que $n = 5$.

Respuesta: 5

Problema 3

Carlos tiene 15 caramelos. Él lanza un dado y, dependiendo del resultado, ocurre lo siguiente:

- Si el resultado es 4, 5 o 6, gana 15 caramelos.
- Si el resultado es 2 o 3, gana 5 caramelos.
- Si el resultado es 1, pierde 15 caramelos.

La probabilidad de que Carlos duplique su número de caramelos luego de tres lanzamientos es a/b, donde a y b son enteros positivos coprimos. Calcule el valor de $a+b$.

Solución

Para duplicar el número de caramelos, necesita obtener 15 caramelos más. Para ello tenemos los posibles casos:

$$\begin{aligned} -15+15+15 \\ 15-15+15 \\ 15+15-15 \\ 5+5+5 \end{aligned}$$

Cada uno de los primeros tres casos tienen probabilidad $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$, como ocurre tres veces, la probabilidad total es $3\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
El cuarto caso tiene probabilidad $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$.
Finalmente, $\frac{a}{b} = \frac{1}{8}+\frac{1}{27} = \frac{35}{216}$ y así $a+b = 35+216 = 251$.

Respuesta: 251

Problema 4

Ramón sale de su casa hacia el trabajo cada día laborable exactamente a las 8:00 a.m. Siempre se transporta en bicicleta y tiene una hora fija de entrada al trabajo. Cuando se desplaza con una rapidez de 30 km/h, llega 3 minutos antes de la hora de entrada. En cambio, si lo hace con una rapidez de 20 km/h, llega 3 minutos tarde. ¿A qué rapidez, en km/h, debe desplazarse Ramón para llegar exactamente a tiempo a su trabajo?

Solución

Si la hora de entrada de Ramón ocurre x minutos después de las 8:00 a.m., a una velocidad promedio de 30 km/h demora $x - 3$ minutos mientras que a una velocidad promedio de 20 km/h demora $x + 3$ minutos. Entonces:

$$30(x - 3) = 20(x + 3) \rightarrow x = 15$$

Si queremos llegar exactamente en 15 minutos a una velocidad V km/h, entonces:

$$30(15 - 3) = V(15) \rightarrow V = 24$$

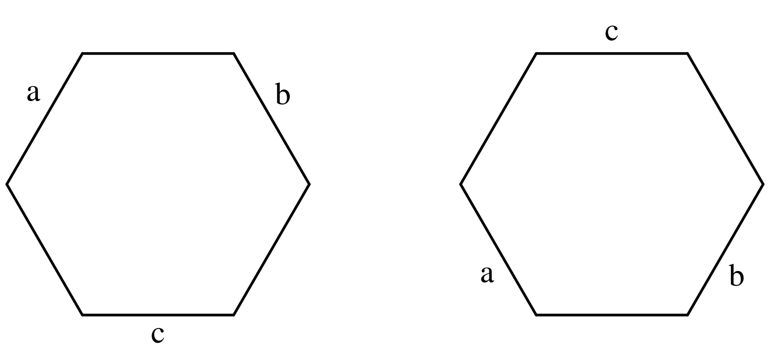
Respuesta: 24

Problema 5

Seis amigos se sientan alrededor de una mesa con forma de hexágono regular, colocándose uno en cada lado. Llamaremos *vecinos* a dos amigos que estén sentados en lados consecutivos del hexágono. Los números del 2 al 7 se escriben en seis papelitos, uno por número, y luego se reparten al azar, uno a cada amigo. Se desea calcular la probabilidad de que cada par de amigos vecinos hayan recibido dos números coprimos. Si esta probabilidad es $\frac{1}{P}$, determine el valor de P.

Solución

El total de posibilidades sería $6! = 720$. Ahora contaremos los casos favorables. Primero analizaremos los números pares: 2, 4 y 6. Como queremos que todas las parejas vecinas tengan números coprimos, estos 3 números deben estar separados. Esto se consigue en dos configuraciones:



Para cada una de estas configuraciones, podemos ordenar los números (2,4,6) de 6 maneras, por lo que hay 12 posibilidades en total.
Ahora analizando la posición del número 3, este no puede estar al costado del número 6 y por cómo se encuentran ubicados los números 2 y 4, la única posibilidad es el lado opuesto al 6.
Por último, los números 5 y 7 son coprimos con todos los demás, por lo que pueden ubicarse en cualquier configuración en los espacios restantes, lo cual da 2 posibilidades adicionales.
Por lo tanto, la cantidad total de casos favorables sería $12 \times 2 = 24$. Entonces la probabilidad sería

$$\frac{1}{P} = \frac{24}{720} \quad \rightarrow \quad P = 30$$

Respuesta: 30

Problema 6

Los números a, b y c son enteros positivos que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ab + c &= 60, \\ bc + a &= 60, \\ ca + b &= 105. \end{aligned}$$

Determine el valor de $a + b + c$.

Solución

Si restamos las dos primeras ecuaciones tenemos:

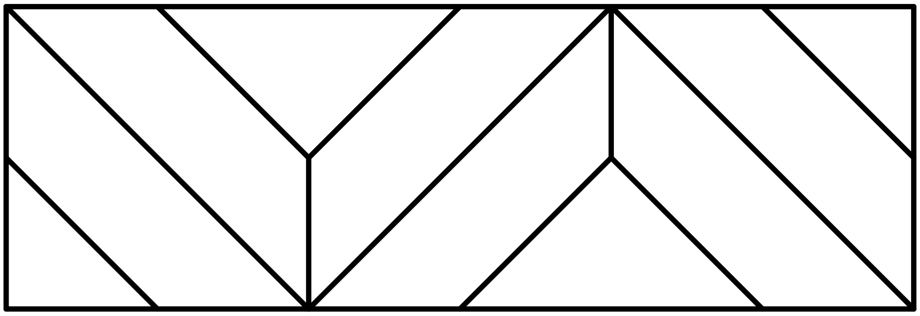
$$ab + c - bc - a = 0 \rightarrow (b-1)(a-c) = 0 \rightarrow b = 1 \vee a = c$$

Si $b = 1$, las ecuaciones se convierten en $a + c = 60 \rightarrow c = 60 - a$ y $ac + 1 = 105$. Entonces $a(60 - a) = 104 \rightarrow a = 30 \pm 2\sqrt{199}$, el cuál no es un entero positivo.
Entonces $a = c$ y las ecuaciones se convierten en $a(b+1) = 60$ y $a^2 + b = 105$. Como a y b son enteros positivos, tenemos $a^2 < 105 \rightarrow a \leq 10$. Además, a es un divisor de 60, por lo que las posibilidades para a serían 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 10. Analizando cada uno de los valores, la única posibilidad para que b sea un entero positivo se da con $a = c = 10$ y nos da $b = 5$.
Entonces $a + b + c = 25$.

Respuesta: 25

Problema 7

La siguiente figura muestra cómo ha sido dividido el segundo piso de la casa de los Gonzales en 10 habitaciones, algunas con forma de triángulo y otras con forma de trapecio:



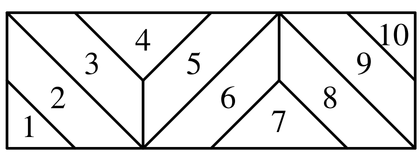
La familia Gonzales se dispone a pintar las paredes de cada habitación, y para ello cuenta únicamente con tres colores distintos de pintura: rojo, azul y verde. El abuelo Gilberto establece las siguientes reglas:

- Dentro de cada habitación se debe usar un solo color.
- Si dos habitaciones comparten una pared, deben ser pintadas de colores distintos.

¿De cuántas maneras diferentes pueden ser pintadas las habitaciones, respetando las reglas impuestas por don Gilberto?

Solución

Enumeremos las habitaciones de la siguiente manera:



Observando las habitaciones 3, 4 y 5, cada pareja de estas comparte una pared. Esto implica que las 3 habitaciones tienen colores diferentes. En esta situación, tenemos 6 combinaciones para estas 3 habitaciones. Vamos a fijar estos colores y analizaremos las posibilidades de los colores de las habitaciones restantes.
Para la habitación 2, al ser vecina a la habitación 3, tiene 2 posibilidades de colores.
Para la habitación 1, al ser vecina a la habitación 2, tiene 2 posibilidades de colores.
Para la habitación 6, al ser vecina a la habitación 5, tiene 2 posibilidades de colores.
Las habitaciones 7 y 8 son vecinas y cada una es vecina a la habitación 6, por lo que estas 3 habitaciones tienen colores diferentes. Por lo tanto existen 2 posibles combinaciones para estas habitaciones.
Para la habitación 9, al ser vecina a la habitación 8, tiene 2 posibilidades de colores.
Para la habitación 10, al ser vecina a la habitación 9, tiene 2 posibilidades de colores.

Entonces, la cantidad total de posibilidades sería

$$6 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 384$$

Respuesta: 384

Problema 8

Sobre una mesa hay doce cartas numeradas del 1 al 12. Ana divide las cartas en dos grupos (con al menos una carta en cada grupo), se queda con uno de ellos y entrega el otro grupo a Beto. Luego, Ana multiplica los números escritos en sus cartas y obtiene como resultado el número A. Por su parte, Beto hace lo mismo con sus cartas y obtiene como resultado el número B. Si se cumple que A es múltiplo de B, determine el menor valor posible del cociente $\frac{A}{B}$.

Solución

Llamemos $C = \frac{A}{B}$. Como Ana y Beto en conjunto tienen todas las cartas del 1 al 12, al multiplicar A y B tendremos:

$$A \times B = C \times B^2 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 = 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11.$$

Como los exponentes de los términos 3, 7 y 11 son impares, tendremos que estos factores primos están presentes en C, pues caso contrario solo podrían estar en B y al estar elevado al cuadrado nos daría un exponente par. Entonces, el menor valor que podría tomar C sería $3 \times 7 \times 11 = 231$.

Esto se consigue con los siguientes grupos:

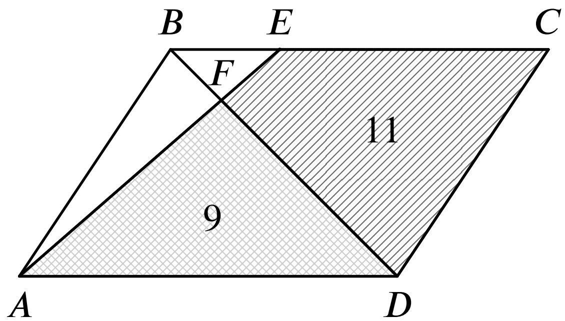
$$A = 1 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 \times 8 \times 9 \times 11$$

$$B = 2 \times 6 \times 10 \times 12$$

Respuesta: 231

Problema 9

En un paralelogramo $ABCD$, se elige un punto E del lado BC. Los segmentos AE y BD se intersecan en el punto F. Si el área de la región AFD es $9\,\text{cm}^2$ y el área de la región $ECDF$ es $11\,\text{cm}^2$, determine el mayor valor posible del área del paralelogramo $ABCD$.



Solución

Consideremos que el área del triángulo BFE es a^2. Dado que $BE//AD$, tenemos la siguiente relación de áreas:

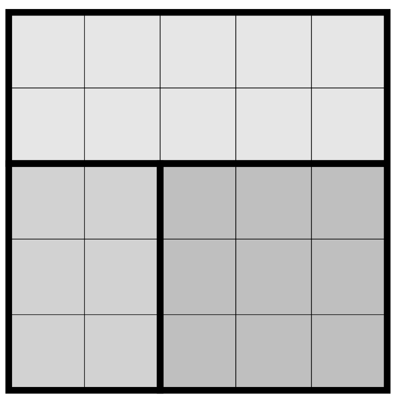
$$\frac{BFE}{ABF} = \frac{EF}{FA} = \frac{BF}{FD} = \frac{ABF}{AFD}$$

Entonces, $BFE \times AFD = ABF^2 \rightarrow ABF = 3a$. Como $ABCD$ es un paralelogramo, las áreas de ABD y BCD son iguales, entonces $3a + 9 = a^2 + 11 \rightarrow a = 1 \vee a = 2$.
Cuando $a = 1$, el área del paralelogramo sería 24. Cuando $a = 2$, el área del paralelogramo sería 30. Por lo tanto, el mayor valor del área posible es 30.

Respuesta: 30

Problema 10

Un tablero de 5×5 casillas debe ser dividido en rectángulos (posiblemente cuadrados), de modo que cada rectángulo cubra un número entero de casillas. En la figura siguiente se muestra un ejemplo en el que el tablero ha sido dividido en tres rectángulos: uno de ellos cubre 10 casillas, otro cubre 6 casillas y el tercero cubre 9 casillas.



Una vez dividido el tablero, se forma una lista con la cantidad de casillas cubiertas por cada rectángulo. Luego, se multiplican estos valores, y se obtiene un producto P. En el ejemplo mostrado, el producto es $P = 10 \times 6 \times 9$. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar el producto P?

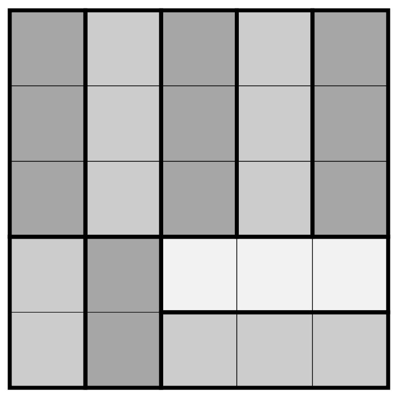
Solución

Consideremos que se tiene un rectángulo de tamaño $m \times n$, donde $m \geq 2$ y $n \geq 2$. Este rectángulo lo podemos dividir en 2 rectángulos de tamaños $1 \times n$ y $(m-1) \times n$. Con esta nueva división, el producto por parte de estos rectángulos sería $n \times (m-1) \times n$ en vez de $m \times n$. Como $n \geq 2 \rightarrow n \times (m-1) \geq 2(m-1) \geq m$, por lo que el nuevo producto sería mayor o igual al producto antes de la división. Siguiendo estas divisiones, podemos seguir incrementando el producto P hasta que todos los rectángulos sean de la forma $1 \times m$.

Ahora consideremos que se tiene un rectángulo de tamaño $1\times m$, donde $m \geq 4$. Este rectángulo lo podemos dividir en 2 rectángulos de tamaños 1×2 y $1 \times (m-2)$. De esta manera, el producto por parte de estos rectángulos sería $2 \times (m-2)$ en vez de m. Como $m \geq 4 \to 2 \times (m-2) \geq m$, por lo que el nuevo producto sería mayor o igual al producto antes de la división. Siguiendo estas divisiones, podemos seguir incrementando el producto P hasta que todos los rectángulos sean de la forma 1×2 y 1×3.
Entonces, el mayor valor de P se consigue utilizando solamente rectángulos que contienen 2 o 3 casillas. Sean a y b la cantidad de estos rectángulos, respectivamente. Entonces $2a + 3b = 25$ y el producto P sería $P = 2^a 3^b$. Como a y b son enteros no negativos, a debe ser de la forma $3x + 2$ y con ello $b = 7 - 2x$. Entonces

$$P = 2^{3x+2}3^{7-2x} = 2^2 3^7 \frac{2^{3x}}{3^{2x}} = 2^2 3^7 \left(\frac{8}{9}\right)^x \leq 2^2 3^7 = 8748.$$

Por lo tanto el mayor valor de P es 8748, el cual se consigue con la siguiente división:



Respuesta: 8 748