



XXI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA - ACEROS AREQUIPA

ONEM-AA 2025

Etapla UGEL - Nivel 3

21 de agosto de 2025

Problema 1

Julio escribió una lista con todos los números de tres cifras que se pueden formar usando tres dígitos consecutivos (en algún orden). Para su sorpresa, en la lista apareció un número cuadrado perfecto cuya suma de cifras es 18. Determine dicho número.

Aclaración: Un número es llamado cuadrado perfecto si se obtiene al elevar un número entero al cuadrado.

Solución

Como la suma de dígitos es 18 y las cifras son números consecutivos, entonces las cifras deben ser: 5, 6 y 7, en algún orden.

Tenemos 6 posibles números que podemos generar:

567 576

657 675

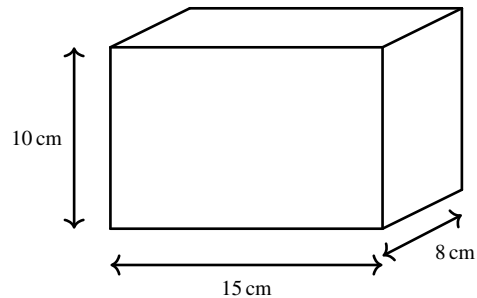
756 765

De las 6 posibles opciones, el único que es cuadrado perfecto es $576 = 24^2$.

Respuesta: 576

Problema 2

Un carpintero dispone de un bloque de madera con dimensiones $10 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ como muestra la siguiente figura.



El carpintero retira un cubo de lado $L \text{ cm}$ de cada una de las esquinas del bloque. Si el volumen total retirado representa el 18 % del volumen original del bloque, determine el valor de L .

Solución

El volumen original del bloque en cm^3 es $10 \times 15 \times 8 = 1200$. El volumen de cada cubo removido en cm^3 es L^3 . Como el bloque tiene 8 esquinas, el volumen total removido en cm^3 es $8L^3$. Por dato,

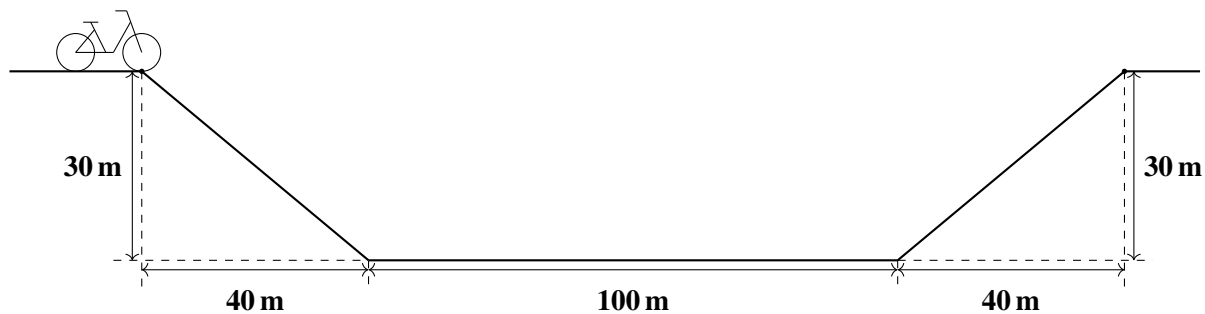
$$8L^3 = 18\% \text{ } 1200.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos $L = 3$.

Respuesta: 3

Problema 3

Pablo recorre en bicicleta tres tramos consecutivos: uno de bajada, uno plano y uno de subida. Las dimensiones de cada tramo se muestran en la siguiente figura.



Si su rapidez es de 20 km/h en el tramo de bajada, 15 km/h en el tramo plano y 10 km/h en el tramo de subida, ¿cuánto tiempo, en segundos, le toma recorrer los tres tramos?

Solución

Sean a y b respectivamente las longitudes en metros del primer tramo y del tercer tramo. Por el Teorema de Pitágoras,

$$a^2 = 30^2 + 40^2 \quad \text{y} \quad b^2 = 30^2 + 40^2.$$

Resolviendo estas ecuaciones (y recordando que a y b son números positivos), obtenemos $a = 50$ y $b = 50$.

Sean t_1 , t_2 y t_3 respectivamente los tiempos en segundos que le toma a Pablo recorrer el primer, el segundo y el tercer tramo.

En el primer tramo, la velocidad de Pablo en metros por segundo es $20 \times \frac{10}{36} = \frac{50}{9}$ y entonces

$$t_1 = \frac{a}{\frac{50}{9}} = \frac{50}{\frac{50}{9}} = 9.$$

En el segundo tramo, la velocidad de Pablo en metros por segundo es $15 \times \frac{10}{36} = \frac{25}{6}$ y entonces

$$t_2 = \frac{100}{\frac{25}{6}} = 24.$$

En el tercer tramo, la velocidad de Pablo en metros por segundo es $10 \times \frac{10}{36} = \frac{25}{9}$ y entonces

$$t_3 = \frac{b}{\frac{25}{9}} = \frac{50}{\frac{25}{9}} = 18.$$

Finalmente, el tiempo en segundos que le toma a Pablo recorrer los tres tramos es $t_1 + t_2 + t_3 = 9 + 24 + 18 = 51$.

Respuesta: 51

Problema 4

Juan compró un dado no convencional. Tras examinarlo cuidadosamente, determinó que no era justo, y construyó la siguiente tabla con las probabilidades de obtener cada uno de los seis posibles resultados al lanzarlo:

Número	Probabilidad
1	$1/9$
2	$1/9$
3	$1/9$
4	$2/9$
5	$2/9$
6	$2/9$

El dado se lanza dos veces de forma consecutiva. Si la probabilidad de que la suma de los dos resultados obtenidos sea un número par es igual a $A/81$, determine el valor de A .

Solución

Sean a y b respectivamente los números que se obtienen en el primer y el segundo lanzamiento del dado.

La probabilidad de que a sea impar (es decir, que sea igual a 1, 3 o 5) es

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9},$$

y la probabilidad de que a sea par es

$$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Lo mismo ocurre con b .

La suma $a + b$ es par cuando se presenta una de las siguientes situaciones (disjuntas): I) a y b son impares; o II) a y b son pares.

La probabilidad de que a y b sean impares es $\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$.

La probabilidad de que a y b sean pares es $\frac{5}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{25}{81}$.

En conclusión, la probabilidad de que la suma $a + b$ sea par es $\frac{16}{81} + \frac{25}{81} = \frac{41}{81}$ y entonces $A = 41$.

Respuesta: 41

Problema 5

En un colegio se organizó un torneo de ajedrez con participación de varones y mujeres. Todos los participantes jugaron una partida contra cada uno de los demás. Cada victoria otorgaba 1 punto, cada empate 0.5 puntos y cada derrota 0 puntos. Al finalizar el torneo, se observó que cada jugador obtuvo exactamente la mitad de sus puntos en partidas contra mujeres y la otra mitad en partidas contra varones. Si se sabe que el número total de participantes fue un entero entre 40 y 60, ¿cuántos jugadores participaron en el torneo?

Solución

Sean $H_1, H_2, \dots, H_a$ los hombres que participaron en el torneo y $M_1, M_2, \dots, M_b$ las mujeres que participaron en el torneo. Para $i, j \in \{1, 2, \dots, a\}$ con $i \neq j$, sea h_{ij} los puntos que recibió el participante H_i en su partida contra el participante H_j . Notemos que independientemente del resultado de la partida entre los participantes H_i y H_j , se tiene que $h_{ij} + h_{ji} = 1$. Entonces la suma de los puntos que obtuvieron los participantes hombres en partidas contra participantes hombres es:

$$\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq a \\ i \neq j}} h_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq a} (h_{ij} + h_{ji}) = \sum_{1 \leq i < j \leq a} 1 = \frac{a(a-1)}{2}.$$

Sean A la suma de los puntos que obtuvieron los participantes hombres en todas sus partidas y B la suma de los puntos que obtuvieron las participantes mujeres en todas sus partidas. Por dato, $\frac{A}{2} = \frac{a(a-1)}{2}$ y entonces $A = a(a-1)$.

De modo similar, la suma de todos los puntos que obtuvieron los participantes mujeres en partidas contra participantes mujeres es $\frac{b(b-1)}{2}$ y $B = b(b-1)$.

Para $i \in \{1, 2, \dots, a\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, b\}$, sean r_{ij} y s_{ij} los puntos que recibieron respectivamente el participante H_i y la participante M_j cuando se realizó la partida entre ellos. Notemos que independientemente del resultado de la partida entre los participantes H_i y M_j , se tiene que $r_{ij} + s_{ij} = 1$. La suma de los puntos que obtuvieron los participantes hombres en sus partidas contra participantes mujeres es:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq a \\ 1 \leq j \leq b}} r_{ij}.$$

La suma de los puntos que obtuvieron las participantes mujeres en sus partidas contra participantes hombres es:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq a \\ 1 \leq j \leq b}} s_{ij}.$$

Por dato,

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq a \\ 1 \leq j \leq b}} r_{ij} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq a \\ 1 \leq j \leq b}} s_{ij} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq a \\ 1 \leq j \leq b}} (r_{ij} + s_{ij}) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq a \\ 1 \leq j \leq b}} 1 = ab.$$

Entonces $a(a-1) + b(b-1) = 2ab$ o equivalentemente, $a + b = (a-b)^2$. En particular, el número de participantes $a + b$ es el cuadrado de un número entero. Como este número debe estar entre 40 y 60, entonces debe ser igual a 49.

Respuesta: 49

Problema 6

Ana y Berta deben elegir, cada una, un número de tres cifras, de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- El número elegido por Ana debe estar formado por tres cifras iguales.
- El producto de los dos números elegidos debe ser un número de seis cifras iguales.

¿Cuál es el mayor número que puede elegir Berta de modo que se cumplan estas condiciones?

Solución

Sean $\overline{aaa}$ el número elegido por Ana, N el número elegido por Bertha y $\overline{bbbbbb}$ el producto de estos números. Tenemos que $\overline{aaa} \times N = \overline{bbbbbb}$. Entonces $111 \times a \times N = 111111 \times b$. Luego $a \times N = 7 \times 11 \times 13 \times b$. Recordemos que a es un dígito. Si a no fuera igual a 7, los primos 7, 11 y 13 no dividirían a a y luego N debería ser múltiplo de $7 \times 11 \times 13 = 1001$, lo cual no es posible ya que N es un número de tres dígitos. Por lo tanto, $a = 7$ y $N = 11 \times 13 \times b$.

Como N tiene tres dígitos,

$$143 \times b = N \leq 999 \rightarrow b \leq \frac{999}{143} = 6,9 \dots$$

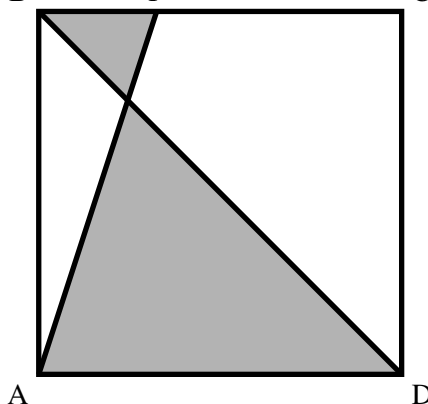
Luego, $b \leq 6$ y $N = 143 \times b \leq 858$.

Podemos ver que en efecto, tomando $a = 7$, $b = 6$ y $N = 858$ se cumplen las condiciones mencionadas en el enunciado. En conclusión, el mayor número que pudo haber elegido Bertha es 858.

Respuesta: 858

Problema 7

En la siguiente figura se muestra un cuadrado $ABCD$ cuya área es 72 m^2 . Sobre el lado BC se elige un punto P de manera que la suma de las áreas de los triángulos sombreados sea la menor posible.



Determine, en metros, la suma de las longitudes de los segmentos AB y BP .

Solución

Por dato, el área en m^2 del cuadrado $ABCD$ es 72 y entonces la longitud en metros del lado del cuadrado es $6\sqrt{2}$ y la diagonal BD tiene una longitud de 12 metros. Sea a la longitud en metros del segmento BP .

Sea E el punto de corte de la diagonal BD y el segmento AP . Notemos que $\angle EBP = \angle EDA = 45^\circ$ y que $DE = BD - BE = 12 - BE$. Como los segmentos BC y AD son paralelos, tenemos que $\angle EPB = \angle EAD$. Entonces los triángulos EPB y EDA son semejantes y en particular,

$$\frac{BE}{12 - BE} = \frac{BE}{DE} = \frac{PB}{AD} = \frac{a}{6\sqrt{2}}.$$

Despejando, obtenemos

$$BE = \frac{12a}{a + 6\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad DE = \frac{72\sqrt{2}}{a + 6\sqrt{2}}.$$

La suma de las áreas en m^2 de los triángulos sombreados (PBE y ADE) es:

$$S = \frac{PB \times BE \times \sin(45^\circ)}{2} + \frac{AD \times DE \times \sin(45^\circ)}{2} = 3\sqrt{2} \times \frac{a^2 + 72}{a + 6\sqrt{2}}.$$

Por la desigual MA-MG, tenemos que

$$\frac{a^2 + 72}{a + 6\sqrt{2}} = \left[a + 6\sqrt{2} + \frac{144}{a + 6\sqrt{2}} \right] - 12\sqrt{2} \geq 2\sqrt{(a + 6\sqrt{2}) \times \frac{144}{a + 6\sqrt{2}}} - 12\sqrt{2} = 24 - 12\sqrt{2}.$$

Además, la igualdad ocurre solo cuando $a + 6\sqrt{2} = \frac{144}{a + 6\sqrt{2}}$, es decir, cuando $a = 12 - 6\sqrt{2}$.

Por dato, el valor de S es el mínimo posible, y entonces debemos tener $S = 3\sqrt{2}(24 - 12\sqrt{2}) = 72\sqrt{2} - 72$ y $a = 12 - 6\sqrt{2}$.

Finalmente, la suma de las longitudes en metros de los segmentos AB y BP es $6\sqrt{2} + (12 - 6\sqrt{2}) = 12$.

Respuesta: 12

Problema 8

Durante una clase, la profesora propuso a sus alumnos el siguiente reto: Cada uno debía elegir un número entero positivo que tuviera más de nueve divisores positivos. Luego, debían ordenar los divisores positivos de su número en una lista de menor a mayor. Después de completar la tarea, Aldo, Blas, Cielo y Dora notaron que, aunque habían elegido números distintos entre sí, cada una de las cuatro listas cumplía con las siguientes características:

- El segundo, sexto, octavo y noveno número en la lista forman una progresión aritmética.
- Existen dos números distintos en la lista cuya suma también aparece en la lista.

¿Cuál es el menor valor posible que puede tener la suma de los cuatro números elegidos por Aldo, Blas, Cielo y Dora?

Solución

Sea n un entero positivo con más de nueve divisores positivos y que cumple las dos características mencionadas. Sean

$$d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_9 < \dots < d_k$$

los divisores positivos de n . Es claro que $d_1 = 1$ y $d_k = n$.

Supongamos que n es impar. En ese caso, todos los divisores positivos de n son impares. Por la segunda característica, deberían haber dos números en la lista $d_a < d_b$ tales que $d_a + d_b$ también es un divisor positivo de n , pero no es posible que los números d_a , d_b y $d_a + d_b$ sean todos impares. En conclusión, n debe ser par y $d_2 = 2$.

Supongamos que d_3 es par. Entonces $d_3 = 2m$ con $m > 1$ entero (ya que $d_3 > d_2 = 2$). Luego, m es un divisor positivo de n y como $d_1 = 1 < m < 2m = d_3$, entonces $m = d_2 = 2$ y $d_3 = 4$. De este modo, concluimos que si d_3 es par entonces $d_3 = 4$.

Por la primera característica, d_2 , d_6 , d_8 y d_9 forman una progresión aritmética, digamos de razón r . Entonces $d_6 = r + 2$, $d_8 = 2r + 2$ y $d_9 = 3r + 2$. Además, $r = d_6 - 2$ es un número entero y $r = d_6 - d_2 \geq 4$.

Supongamos que r es impar. En ese caso, $d_2 = 2$ y $d_6 = r + 2$ son divisores positivos coprimos de n (ya que d_6 sería impar) y entonces $d_2 d_6 = 2r + 4$ también sería un divisor positivo de n . Como $2r + 4 > 2r + 2 = d_8$, entonces $2r + 4 \geq d_9 = 3r + 2$ y luego $r \leq 2$, lo cual no es posible ya que $r \geq 4$. En conclusión, r debe ser par y entonces $r = 2t$ con $t \geq 2$ entero.

Hasta ahora tenemos que $d_1 = 1, d_2 = 2, d_6 = 2t+2, d_8 = 4t+2$ y $d_9 = 6t+2$. Como $d_8 = 2(2t+1)$, entonces $2t+1$ es un divisor positivo de n . Como además $d_6 = 2t+2$, entonces $d_5 = 2t+1$. Notemos también que $d_9 = 2(3t+1)$ y entonces $3t+1$ es un divisor positivo de n . Como además $t \geq 2$, entonces $d_6 = 2t+2 < 2t+3 \leq 3t+1 < 4t+2 < d_8$ y $d_7 = 3t+1$. De manera similar, $d_6 = 2(t+1)$ y entonces $t+1$ es un divisor positivo de n . Como además $t \geq 2$, entonces $d_2 < 3 \leq t+1 < 2t+1 = d_5$. Así que debemos tener $d_3 = t+1$ o $d_4 = t+1$.

Supongamos que $d_4 = t+1$. Analicemos la paridad de d_3 :

- Si d_3 es impar: Entonces $2d_3$ también es un divisor positivo de n . Como $d_3 < d_4 = t+1$, entonces $d_3 < 2d_3 < 2t+2 = d_6$. Como $d_5 = 2t+1$ es impar, debemos tener $2d_3 = d_4 = t+1$. Luego, $d_7 = 3t+1 = 2(3d_3 - 1)$ y entonces $3d_3 - 1$ es un divisor positivo de n . Pero esto no es posible ya que $d_3 \geq 3$ y $d_4 = 2d_3 < 2d_3 + 2 \leq 3d_3 - 1 < 4d_3 - 1 = d_5$.
- Si d_3 es par: Entonces $d_3 = 4$. Analicemos la paridad de t :
 - Si t es par: Entonces $d_3 = 4$ y $d_4 = t+1$ son divisores coprimos de n (ya que $t+1$ sería impar). Luego $d_3 d_4 = 4t+4$ es un divisor positivo de n , pero esto no es posible ya que $t \geq 2$ y $d_8 = 4t+2 < 4t+4 \leq 6t < 6t+2 = d_9$.
 - Si t es impar: Entonces $4 = d_3 < d_4 = t+1 = 2u$ con $u > 2$ entero. Luego u es un divisor positivo de n con $d_2 = 2 < u < d_4$. Así, $u = d_3 = 4, t = 7, d_5 = 15$ y 3 sería un divisor positivo de n , pero esto no es posible ya que $d_2 = 2 < 3 < 4 = d_3$.

Concluimos entonces que $d_3 = t+1$.

Supongamos que d_4 es par. En ese caso, $d_4 = 2v$ con v entero. Luego, v es un divisor positivo de n con $d_2 = 2 \leq v \leq t < d_3$ (ya que $4 \leq d_4 = 2v < d_5 = 2t+1$). Así, $v = d_2 = 2, d_4 = 4, t+1 = d_3 = 3, t = 2, d_8 = 10$ y $d_9 = 14$. Como $d_3 = 3$ y $d_4 = 4$ son divisores positivos coprimos de n , entonces $d_3 d_4 = 12$ también es divisor positivo de n , pero esto no es posible ya que $d_8 = 10 < 12 < 14 = d_9$. Concluimos entonces que d_4 es impar.

Notemos que $d_2 = 2$ y d_4 son divisores positivos coprimos de n (ya que d_4 es impar). Entonces $d_2 d_4 = 2d_4$ es un divisor positivo de n . Como además $d_6 = 2t+2 < 2d_4 < 4t+2 = d_8$ (ya que $t+1 = d_3 < d_4 < d_5 = 2t+1$), entonces $2d_4 = d_7 = 3t+1$. Luego, t es impar y $d_3 = t+1$ es par. Entonces $d_3 = 4, t = 3, d_4 = 5, d_5 = 7, d_6 = 8, d_7 = 10, d_8 = 14, d_9 = 20$. Vemos entonces que para que n cumpla las características mencionadas en el enunciado, n debe cumplir que:

- n debe ser múltiplo de $2^3 \times 5 \times 7 = 280$.
- n no debe ser múltiplo de: $2^4, 3, 11, 13, 17, 19$ (ya que en caso contrario habría un divisor positivo de n menor que $d_9 = 20$ que no está en la lista)

Así, los cuatro menores valores posibles de n son 280 , 5×280 , 7×280 y 23×280 . Finalmente, el menor valor posible de la suma de los números elegidos por Aldo, Blas, Cielo y Dora es $(1 + 5 + 7 + 23)280 = 10080$.

Respuesta: 10 080

Problema 9

En un tablero de 4×4 casillas, decimos que dos casillas son vecinas si comparten un lado. Un llenado *perfecto* del tablero consiste en escribir un número entero positivo en cada casilla, de modo que en cada casilla, el número escrito sea igual a la cantidad de valores distintos escritos en todas sus casillas vecinas. En la figura se muestra un ejemplo de llenado perfecto:

1	3	3	1
3	2	2	3
3	2	2	3
1	3	3	1

¿Cuántos llenados perfectos existen?

Solución

Supongamos que se ha realizado un llenado perfecto. Enumeremos las casillas del tablero del siguiente modo:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Dividamos el tablero en tres zonas: La zona A formada por las casillas 1, 4, 13 y 16; la zona B formada por las casillas 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14 y 15; y la zona C formada por las casillas 6, 7, 10 y 11. Entonces el número escrito en una casilla de la zona A es a lo sumo 2 (ya que estas casillas tienen 2 casillas vecinas), el número escrito en una casilla de la zona B es a lo sumo 3 y el número escrito en una casilla de la zona C es a lo sumo 4.

Supongamos que hay un 4 en alguna casilla. Entonces esa casilla debe tener 4 vecinas con los números 1, 2, 3 y 4 escritos en ellas (uno en cada vecina). De esas casillas vecinas, la que tiene escrita el 1 en ella tiene una casilla vecina (la original) con el 4 escrita en ella y también tiene (al menos) una casilla vecina en el borde (zona A o B) en la que también debería estar escrito el 4, pero esto no es posible. En conclusión, los números escritos en las casillas solo pueden ser 1, 2 o 3. Las situaciones que se pueden presentar son:

Etapa UGEL - Nivel 3

I) Hay una casilla en la zona C con el 1 escrito en ella: Si en la casilla 6 está escrito el número 1,

b	a		
a	1	a	
	a		

Entonces $b = 1$ y $a \leq 2$ (ya que en la casilla 2 está escrito el número a y en sus casillas vecinas 1 y 6 está escrito el número 1). Si $a = 1$, podemos ver que el único llenado perfecto posible es

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Si $a = 2$,

1	2	c	d
2	1	2	e
f	2		
g	h		

Como en la casilla 2 está escrito el número 2, entonces $c \neq 1$. Como además los números escritos en las casillas vecinas de la casilla 3 son 2, 2 y d , entonces $c = 2$, $d = 1$ y $e = 2$. De manera similar, podemos concluir que $f = 2$, $g = 1$ y $h = 2$.

1	2	2	1
2	1	2	2
2	2	i	j
1	2	k	l

Como en la casilla 8 está escrito el número 2, entonces $j = 1$ o $j = 2$. De manera similar, $k = 1$ o $k = 2$.

Supongamos que $j = 1$. Entonces $i = l = 2$ y $k = 1$. En la casilla 16 estaría escrito el número 2, pero debería estar escrito el número 1 (ya que $k = j = 1$). Concluimos entonces que $j = 2$.

Del mismo modo, concluimos que $k = 2$. Luego, $i = l = 1$.

De manera similar, luego de analizar los casos en los que está escrito el número 1 en la casilla 7, 10 u 11, concluimos que en la situación I), los llenados perfectos posibles son:

Etapa UGEL - Nivel 3

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

1	2	2	1
2	1	2	2
2	2	1	2
1	2	2	1

1	2	2	1
2	2	1	2
2	1	2	2
1	2	2	1

- II) No hay una casilla en la zona *C* con el 1 escrito en ella y hay una casilla en la zona *C* con el 3 escrito en ella: Si en la casilla 6 está escrito el número 3,

<i>a</i>	<i>b</i>		
<i>c</i>	3	<i>d</i>	
	<i>e</i>		

En la casilla 6 está escrito el número 3 y entonces uno de los números *b*, *c*, *d* o *e* debe ser igual a 1. Como $d \neq 1$ y $e \neq 1$, entonces $b = 1$ o $c = 1$. Luego $a = 3$, pero esto no es posible.

De manera similar, luego de analizar los casos en los que el número 3 está escrito en la casilla 7, 10 u 11, concluimos que no hay llenado perfecto en la situación II).

- III) En cada casilla de la zona *C* está escrito el número 2: Notemos que en la zona *B* debe haber una casilla con un número distinto de 2 escrito en ella, ya que en caso contrario, el número escrito en la casilla 6 debería ser 1. Se pueden presentar las siguientes situaciones:

- i) Hay una casilla en la zona *B* con el número 1 escrito en ella: Si en la casilla 2 está escrito el número 1,

<i>a</i>	1	<i>k</i>	<i>j</i>
<i>b</i>	2	2	<i>i</i>
<i>c</i>	2	2	<i>h</i>
<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>

Podemos concluir sucesivamente que $k = a = 2$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 2$, $e = 2$, $f = 1$, $g = 2$, $h = 2$, $i = 1$ y $j = 2$.

De manera similar, luego de analizar los casos en los que hay una casilla en la zona *B* con el número 1 escrito en ella, concluimos que los llenados perfectos en la situación i) son:

2	1	2	2
2	2	2	1
1	2	2	2
2	2	1	2

2	2	1	2
1	2	2	2
2	2	2	1
2	1	2	2

- ii) No hay casilla en la zona B con el 1 escrito en ella y hay una casilla en la zona B con el 3 escrito en ella: Si en la casilla 2 está escrito el número 3,

a	3	k	j
b	2	2	i
c	2	2	h
d	e	f	g

Podemos concluir sucesivamente que $k = 3$, $a = 1$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 1$, $e = 3$, $f = 3$, $g = 1$, $h = 3$, $i = 3$ y $j = 1$.

De manera similar, luego de analizar los casos en los que hay una casilla en la zona B con el número 3 escrito en ella, concluimos que el único llenado perfecto en la situación ii) es:

1	3	3	1
3	2	2	3
3	2	2	3
1	3	3	1

Finalmente, concluimos que hay exactamente 6 llenados perfectos.

Respuesta: 6

Problema 10

Ana y Bruno juegan en un tablero de 8×8 casillas. Primero, Ana elige en secreto una casilla cualquiera del tablero. Luego, Bruno realiza una serie de intentos para adivinar cuál fue la casilla elegida.

En cada intento, Bruno selecciona una casilla del tablero. Si acierta, el juego termina. Si no, Ana le informa a cuántos pasos de distancia se encuentra la casilla que selecciona Bruno de la casilla que ella eligió. Un paso consiste en moverse horizontal o verticalmente entre casillas adyacentes que comparten un lado.

Por ejemplo, si Ana eligió la casilla marcada como A en la figura y Bruno selecciona la casilla B , Ana le informa que está a 6 pasos de distancia.

						B	
		A					

Bruno afirma que, realizando a lo más n intentos, es capaz de descubrir la casilla elegida por Ana, sin importar cuál haya sido la elección de Ana. ¿Cuál es el menor valor de n que hace verdadera la afirmación de Bruno?

Solución

Demostraremos que luego de a lo más dos intentos, Bruno puede descubrir cuál es la casilla que escogió Ana.

Primero, Bruno escoge las casillas marcadas con las letras X e Y

X							Y

Una casilla que se ubique a posiciones a la derecha de X y b posiciones hacia abajo de X, estará a distancia $a + b$ y estará a distancia $7 - a + b$ de Y.

Los datos que tenemos son:

$$m = a + b,$$

$$n = 7 - a + b,$$

entonces $b = \frac{m + n - 7}{2}$ y $a = m - \frac{m + n - 7}{2}$. Por lo tanto, podemos ubicar la casilla que escogió Ana.

Es imposible hacerlo con menos, pues al escoger solamente una casilla, en caso que la casilla no sea la correcta, obtenemos diferentes opciones para encontrar la que sí sea la correcta.

Respuesta: 3